Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes.

Par J. DIXMIER à Dijon (France).

Dans tout cet article, K désigne un corps commutatif. Toutes les algèbres de Lie et toutes les représentations de ces algèbres sont supposées de dimension finie sur K.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, M un $\mathfrak{g}$-module. On désigne par $C^i(\mathfrak{g}, M)$ le groupe des cochaînes alternées de degré i sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M. (On convient que $C^i(\mathfrak{g}, M) = 0$ pour $i < 0$.) On désigne par d l'opérateur de cobord dans la somme directe des $C^i(\mathfrak{g}, M)$, par $H^i(\mathfrak{g}, M)$ le $i^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie (cf. [4], dont nous utilisons les notations). Lorsque M est le module de représentation trivial de dimension 1 sur K, on écrit $C^i(\mathfrak{g}), H^i(\mathfrak{g})$ au lieu de $C^i(\mathfrak{g}, M)$, $H^i(\mathfrak{g}, M)$.

Comme observé dans [2], le th. 3 de [1] peut s'énoncer en disant que $H^2(\mathfrak{g}) \neq 0$ si $\mathfrak{g}$ est nilpotente de dimension > 1. D'autre part, comme $H^1(\mathfrak{g})$ est le dual de l'espace $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, une partie du th. 1 de [3] peut s'énoncer en disant que $\dim H^1(\mathfrak{g}) \geqq 2$ si $\mathfrak{g}$ est nilpotente de dimension > 1. Nous allons montrer que, pour $1 \leqq i \leqq \dim \mathfrak{g} - 1$, on a $\dim H^i(\mathfrak{g}) \geqq 2$ si $\mathfrak{g}$ est nilpotente. (D'après [5], ceci s'interprète dans la cohomologie des espaces homogènes compacts des groupes de Lie connexes nilpotents.) Plus généralement, nous allons étudier les $H^i(\mathfrak{g}, M)$ pour $\mathfrak{g}$ nilpotente.

1. Une suite exacte.

Proposition 1. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, x un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{h}$, M un $\mathfrak{g}$-module. On a une suite exacte*

$$\cdots \xrightarrow{u_{i-1}} H^{i-1}(\mathfrak{h}, M) \xrightarrow{s_i} H^i(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{r_i} H^i(\mathfrak{h}, M) \xrightarrow{u_i} H^i(\mathfrak{h}, M) \xrightarrow{s_{i+1}} H^{i+1}(\mathfrak{g}, M) \rightarrow \cdots$$

dans laquelle l'homomorphisme u_i est l'homomorphisme défini canoniquement par x dans le $\mathfrak{g}$-module $H^i(h, M)$, et l'homomorphisme r_i est l'homomorphisme de restriction.

Démonstration. Soit $D(\mathfrak{g}, M)$ le noyau de l'homomorphisme canonique $C(\mathfrak{g}, M) \rightarrow C(\mathfrak{h}, M)$. Ce noyau est somme directe de ses intersections.

$D^i(\mathfrak{g}, M)$ avec les $C^i(\mathfrak{g}, M)$. Ecrivons la suite exacte

$$0 \to D(\mathfrak{g}, M) \to C(\mathfrak{g}, M) \to C(\mathfrak{h}, M) \to 0.$$

Il en résulte la suite exacte

$$(1) \qquad \cdots \to H^i(D(\mathfrak{g}, M)) \to H^i(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{r_i} H^i(\mathfrak{h}, M) \xrightarrow{\delta_i} H^{i+1}(D(\mathfrak{g}, M)) \to$$
$$\to H^{i+1}(\mathfrak{g}, M) \to \cdots$$

où δ_i est l'homomorphisme bord. D'autre part, pour toute cochaîne $f \in C^i(\mathfrak{g}, M)$, soit $\tilde{f}$ la restriction à $\mathfrak{h}$ de la cochaîne f_x (rappelons que $f_x(x_1, \ldots, x_{i-1}) = f(x, x_1, \ldots, x_{i-1})$). Il est immédiat que l'application $f \to \tilde{f}$ définit un isomorphisme ϱ_i de l'espace vectoriel $D^i(\mathfrak{g}, M)$ sur l'espace vectoriel $C^{i-1}(\mathfrak{h}, M)$, et que $\varrho_{i+1} \circ d = -d \circ \varrho^i$. Donc ϱ^i définit un isomorphisme σ_i de $H^i(D(\mathfrak{g}, M))$ sur $H^{i-1}(\mathfrak{h}, M)$, et la suite exacte (1) devient la suite exacte de la proposition, avec $u_i = \sigma_{i+1} \circ \delta_i$. Soit $a \in H^i(\mathfrak{h}, M)$. Pour obtenir $\delta_i a$, on prend un cocycle $z \in C^i(\mathfrak{h}, M)$ représentatif de la classe a, et une cochaîne $g \in C^i(\mathfrak{g}, M)$ dont la restriction à $\mathfrak{h}$ soit z; alors, dg est une cochaîne de $D^{i+1}(\mathfrak{g}, M)$ dont la classe est $\delta_i a$. Donc $u_i a$ est la classe de la restriction à $\mathfrak{h}$ de $(dg)_x$. Or, $(dg)_x = x \cdot g - d(g_x)$ (cf. [4], p. 592). Ainsi, $(dg)_x$ est cohomologue à $x \cdot g$, donc la restriction à $\mathfrak{h}$ de $(dg)_x$ est cohomologue à $x \cdot z$, et finalement $u_i a = x \cdot a$.

La prop. 1 peut être considérée comme un cas particulier de la suite spectrale de [4] relative à un idéal.

Remarque. A l'aide de la prop. 1, on généralise aisément le th. 1 de [1]. Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, M un $\mathfrak{a}$-module trivial. On a $H^i(\mathfrak{a}, M) = H^i(\mathfrak{a}) \otimes M = L(\widehat{H^i(\mathfrak{a})}, M)$ ($\widehat{H^i(\mathfrak{a})}$ désignant le dual de l'espace vectoriel $H^i(\mathfrak{a})$, et $L(\widehat{H^i(\mathfrak{a})}, M)$ l'espace des applications linéaires de $\widehat{H^i(\mathfrak{a})}$ dans M). En particulier, $\widehat{H^i(\mathfrak{a})}$ étant considéré comme un $\mathfrak{a}$-module trivial, $H^i(\mathfrak{a}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})}) = L(\widehat{H^i(\mathfrak{a})}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})})$ contient un élément correspondant à l'application identique de $\widehat{H^i(\mathfrak{a})}$. Appelons-le la classe canonique de $H^i(\mathfrak{a}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})})$.

Supposons que $\mathfrak{a}$ soit un idéal d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors, $\widehat{H^i(\mathfrak{a})}$ est un $\mathfrak{g}$-module, et $\mathfrak{a}$ opère dans $\widehat{H^i(\mathfrak{a})}$ de manière triviale. Les structures canoniques de $\mathfrak{g}$-modules de $H^i(\mathfrak{a}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})})$ et de $L(\widehat{H^i(\mathfrak{a})}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})})$ s'identifient, donc la classe canonique de $H^i(\mathfrak{a}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})})$ est annulée par $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{a}$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, la proposition 1 montre alors ceci:

La classe canonique de $H^i(\mathfrak{a}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})})$ *est l'image par* r_i *d'une classe de* $H^i(\mathfrak{g}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})})$.

Pour $i = 2$, ce résultat, exprimé en langage d'extensions, est le th. 1 de [1].

2. Représentation des algèbres de Lie nilpotentes.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, M un $\mathfrak{g}$-module. Les $\mathfrak{g}$-modules quotients des sous-$\mathfrak{g}$-modules de M seront appelés les $\mathfrak{g}$-modules contenus dans M. Ce sont aussi les sous-$\mathfrak{g}$-modules des $\mathfrak{g}$-modules quotients de M. Les $\mathfrak{g}$-modules contenus dans M et irréductibles sont les quotients d'une suite de Jordan—Hölder du $\mathfrak{g}$-module M.

Soit ϱ la représentation de $\mathfrak{g}$ dans M. Si tous les $\mathfrak{g}$-modules irréductibles contenus dans M sont triviaux, les $\varrho(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ sont tous nilpotents. La réciproque est vraie d'après le théorème d'Engel.

Pour tout endomorphisme u de l'espace vectoriel M, désignons par $V(u)$ le sous-espace réunion des noyaux des u^n pour $n = 1, 2, \ldots$, et par $W(u)$ le sous-espace intersection des $u^n(M)$ pour $n = 1, 2, \ldots$ On sait que M est somme directe de $V(u)$ et $W(u)$. La proposition suivante est bien connue:

P r o p o s i t i o n 2. *Supposons $\mathfrak{g}$ nilpotente. Soient M_1 l'intersection des $V(\varrho(x))$ pour $x \in \mathfrak{g}$, M_2 le sous-espace engendré par les $W(\varrho(x))$ pour $x \in \mathfrak{g}$. Alors, M_1 et M_2 sont des sous-$\mathfrak{g}$-modules de M dont M est somme directe. Tous les $\mathfrak{g}$-modules irréductibles contenus dans M_1 (resp. M_2) sont triviaux (resp. non triviaux).*

Pour la commodité du lecteur, rappelons brièvement une démonstration. La proposition est évidente si *tous* les $\varrho(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ sont nilpotents, ou si *un* $\varrho(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ est un automorphisme de l'espace M. On peut donc supposer qu'il existe un $x \in \mathfrak{g}$ tel que $V(\varrho(x)) \neq 0$ et $W(\varrho(x)) \neq 0$. Alors, par récurrence sur la dimension de M, la proposition sera démontrée si on prouve que $V(\varrho(x))$ et $W(\varrho(x))$ sont des sous-$\mathfrak{g}$-modules de M. Or, cela résulte du lemme suivant: soient u et v des endomorphismes de l'espace M tels que $(ad\, u)^k v = 0$ (on pose $(ad\ u)v = [u, v]$); alors, $V(u)$ et $W(u)$ sont stables pour v. Cette propriété est évidente pour $k = 0$. Admettons-la pour $k - 1$. Posant $w = [u, v]$, on a $(ad\, u)^{k-1} w = 0$, donc $V(u)$ et $W(u)$ sont stables pour w. La formule $u^q v = v u^q + \sum_{s=0}^{q-1} u^{q-s-1} w u^s$ prouve alors que: 1) si $u^p(V(u)) = 0$, alors $u^{2p} v(V(u)) = 0$, donc $v(V(u)) \subset V(u)$; 2) si $W(u) = u^p(M)$, alors $v u^{2p}(M) \subset u^p(M)$, donc $v(W(u)) \subset W(u)$.

3. Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes.

L e m m e 1. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, M un $\mathfrak{g}$-module, ϱ la représentation correspondante de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, x un élément de $\mathfrak{g}$, u_i l'endomorphisme de $H^i(\mathfrak{h}, M)$ défini par x. Si $\varrho(x)$ est nilpotent, u_i est nilpotent. Si $\varrho(x)$ est un automorphisme de l'espace M, u_i est un automorphisme de l'espace $H^i(h, M)$.*

Démonstration. L'endomorphisme $t \to [x, t]$ de l'espace $\mathfrak{h}$ se prolonge en une dérivation de degré 0 de l'algèbre extérieure $\wedge \mathfrak{h}$. Soit φ l'endomorphisme de $\overset{i}{\wedge} \mathfrak{h}$ induit par cette dérivation. L'espace $C^i(\mathfrak{h}, M)$ s'identifie à l'espace d'applications linéaires $L(\overset{i}{\wedge} \mathfrak{h}, M)$. Soit w l'endomorphisme de cet espace défini par x; si $f \in L(\overset{i}{\wedge} \mathfrak{h}, M)$, $w(f)$ est l'application $u \to \varrho(x) \cdot f(u) - f(\varphi(u))$; donc w est la somme des deux endomorphismes $f \to \varrho(x) \circ f$, $f \to -f \circ \varphi$. Ces deux endomorphismes sont permutables. Comme l'endomorphisme $t \to [x, t]$ de $\mathfrak{h}$ est nilpotent, φ est nilpotent, et par suite aussi l'endomorphisme $f \to -f \circ \varphi$. Si $\varrho(x)$ est nilpotent, $f \to \varrho(x) \circ f$ est nilpotent, donc w est nilpotent, donc u_i est nilpotent. Si $\varrho(x)$ est un automorphisme de l'espace M, $f \to \varrho(x) \circ f$ est un automorphisme de l'espace $L(\overset{i}{\wedge} \mathfrak{h}, M)$, donc w est un automorphisme de l'espace $L(\overset{i}{\wedge} \mathfrak{h}, M)$ (car, si α et β sont deux endomorphismes permutables d'un espace vectoriel, avec α inversible et β nilpotent, $\alpha^{-1}\beta$ est nilpotent, donc $1 + \alpha^{-1}\beta$ est inversible, donc $\alpha + \beta$ est inversible); donc u_i est un automorphisme de l'espace $H^i(\mathfrak{h}, M)$.

Théorème 1. *Supposons K infini. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, M un $\mathfrak{g}$-module. Si tout $\mathfrak{g}$-module contenu dans M est non trivial, on a $H^i(\mathfrak{g}, M) = 0$ pour tout i.*

Démonstration. Supposons d'abord M irréductible non trivial. Il existe un x de $\mathfrak{g}$, $x \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, tel que $\varrho(x)$ ne soit pas nilpotent. (Sinon, comme K est infini, $\varrho(y)$ serait nilpotent pour tout $y \in \mathfrak{g}$, ce qui est impossible puisque M est irréductible non trivial). D'après ce qu'on a vu dans la démonstration de la prop. 2, ceci entraîne que $\varrho(x)$ est un automorphisme de M. Soit $\mathfrak{h}$ un sous-espace de $\mathfrak{g}$ de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, tel que $x \notin \mathfrak{h}$. Ce sous-espace est un idéal de $\mathfrak{g}$, et nous pouvons appliquer la prop. 1. D'après le lemme 1, les u_i sont des automorphismes des $H^i(\mathfrak{h}, M)$. Donc $r_i = s_i = 0$. Donc $H^i(\mathfrak{g}, M) = 0$.

Dans le cas général, nous établirons le théorème par récurrence sur la dimension de M. Supposons le théorème établi pour $\dim M < n$, et envisageons le cas où $\dim M = n$. Si M est irréductible, le théorème résulte de ce qui précède. Sinon, il existe un sous-$\mathfrak{g}$-module N de M tels que M et M/N soient de dimensions $< n$. Tout $\mathfrak{g}$-module contenu dans N ou M/N est non trivial. Donc $H^i(\mathfrak{g}, N) = H^i(\mathfrak{g}, M/N) = 0$. Alors, la suite exacte

$$\cdots \to H^i(\mathfrak{g}, N) \to H^i(\mathfrak{g}, M) \to H^i(\mathfrak{g}, M/N) \to \cdots$$

prouve que $H^i(\mathfrak{g}, M) = 0$.

Théorème 2. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension n, M un $\mathfrak{g}$-module. S'il existe un $\mathfrak{g}$-module trivial non nul contenu dans M, on a* $\dim H^0(\mathfrak{g}, M) \geqq 1$, $\dim H^n(\mathfrak{g}, M) \geqq 1$, *et* $\dim H^i(\mathfrak{g}, M) \geqq 2$ *pour* $0 < i < n$.

Démonstration. D'après la prop. 2, on peut supposer $M \neq 0$ et tous les $\varrho(y)$ $(y \in \mathfrak{g})$ nilpotents (ϱ désignant la représentation de $\mathfrak{g}$ dans M). Nous allons procéder par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, en supposant le théorème démontré pour $\dim \mathfrak{g} < n$. Il existe (si $\mathfrak{g} \neq 0$) un idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$. Soit $x \in \mathfrak{g}$, tel que $x \notin \mathfrak{h}$. Utilisons les notations de la prop. 1. D'après le lemme 1, les u_i sont nilpotents. Soit i un entier tel que $0 < i < n$. D'après l'hypothèse de récurrence, $H^i(\mathfrak{h}, M) \neq 0$ et $H^{i-1}(\mathfrak{h}, M) \neq 0$. Le noyau de u_i est $\neq 0$ et par suite $r_i \neq 0$. L'image de u_{i-1} est distincte de $H^{i-1}(\mathfrak{h}, M)$ et par suite $s_i \neq 0$. Ainsi, r_i est non nul et de noyau non nul, de sorte que $\dim H^i(\mathfrak{g}, M) \geqq 2$. On établit de manière analogue que $\dim H^0(\mathfrak{g}, M) \geqq 1$ et $\dim H^n(\mathfrak{g}, M) \geqq 1$ (ce qu'il est facile de voir directement).

Remarques. 1. Signalons l'exemple suivant. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie nilpotente de dimension 6 sur K, admettant une base $(e_1, e_2, \ldots, e_6)$ telle que $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_2, e_3] = e_5$, $[e_2, e_5] = e_6$, $[e_3, e_4] = -e_6$, les crochets non écrits étant ou nuls, ou déduits des précédents par antisymétrie. Si la caractéristique de K est $\neq 2$, on a $\dim H^i(\mathfrak{g}) = 2$ pour $0 < i < 6$.

2. On peut parfois améliorer le th. 2. Par exemple, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre dérivée d'une algèbre nilpotente, on peut montrer que $\dim H^i(\mathfrak{g}) \geqq 4$ pour $1 < i < n-1$. Il suffit pour cela d'utiliser le lemme 2 de [3].

3. Les théorèmes 1 et 2 sont en défaut pour les algèbres résolubles.

Bibliographie.

[1] I. Ado, Über die Struktur der endlichen kontinuierlichen Gruppen, *Bull. Soc. Phys.-Math. Kazan,* (3) **6** (1932—33), 38—42 (en russe, avec un résumé allemand).

[2] C. Chevalley et S. Eilenberg, Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, *Transactions American Math. Soc.*, **63** (1948), 85—124.

[3] J. Dixmier, Sur les algèbres dérivées des algèbres de Lie, *Proceedings Cambridge Phil. Soc.*, **51** (1955), 541—544.

[4] G. Hochschild et J. P. Serre, Cohomology of Lie algebras, *Annals of Math.*, **57** (1953), 591—603.

[5] K. Nomizu, On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups, *Annals of Math.*, **59** (1954), 531—538.

(Reçu le 3 juin 1955)